

**METODE ITERASI TITIK TETAP**

disusun guna memenuhi tugas mata kuliah Metode Numerik

Dosen Pengampu : Dr. Rochmad, M.Si.

Rombel 01 (Selasa, 07.00-09.30 WIB)

dimodifikasi dan dipresentasikan oleh:

Kelompok 4

1. Lia Puji (4101412080)
2. Septi Ratnasari (4101412082)
3. Zepta Habib (4101412087)
4. Herlina Ulfa N. (4101412088)

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

**2014**

METODE ITERASI TITIK TETAP

1. **Metode Iterasi Titik Tetap**

Metode iterasi titik tetap disebut juga metode iterasi sederhana, metode langsung, atau metode substitusi beruntun. Metode iterasi titik tetap adalah metode yg memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : x = g(x).

Kesederhanaan metode ini karena pembentukan prosedur iterasinya yang mudah dibentuk sebagai berikut.

1. Ubah persamaan menjadi bentuk ,
2. bentuk menjadi prosedur iterasi,
3. terka sebuah nilai awal ,
4. hitung nilai yang konvergen ke suatu titik *s,*sedemikian sehingga

dan

Kondisi iterasi berhenti apabila

atau bila menggunakan galat relatif hampiran, kriteria berhentinya iterasi dinyatakan

dengan dan telah ditetapkan sebelumnya.

Contoh 1

Carilah akar persamaan dengan metode iterasi titik tetap. Gunakan

Penyelesaian :

Terdapat beberapa kemungkinan prosedur iterasi yang dapat dibentuk.

Dalam hal ini,.

Prosedur iterasinya adalah .Ambil terkaan awal .

Tabel iterasinya:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 4,000000 | 0,683375 |
| 1 | 3,316625 | 0,212877 |
| 2 | 3,103748 | 0,069362 |
| 3 | 3,034385 | 0,022945 |
| 4 | 3,011440 | 0,007629 |
| 5 | 3,003811 | 0,002541 |
| 6 | 3,001270 | 0,000847 |
| 7 | 3,000423 | 0,000282 |
| 8 | 3,000141 | 0,000094 |
| 9 | 3,000047 | 0,000031 |
| 10 | 3,000016 | 0,000010 |
| 11 | 3,000005 | 0,000003 |
| 12 | 3,000002 | 0,000001 |
| 13 | 3,000001 | 0,000001 |
| 14 | 3,000000 | 0,000000 |

Hampiran akar .

(Proses iterasinya konvergen monoton yang membentuk zigzag mendekati hampiran akar ).

Dalam hal ini, .

Prosedur iterasinya adalah .

Ambil terkaan awal .

Tabel iterasinya:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 4,000000 | 2,500000 |
| 1 | 1,500000 | 7,500000 |
| 2 | -6,000000 | 5,625000 |
| 3 | -0,375000 | 0,888158 |
| 4 | -1,263158 | 0,343803 |
| 5 | -0,919355 | 0,108269 |
| 6 | -1,027624 | 0,036748 |
| 7 | -0,990876 | 0,012175 |
| 8 | -1,003051 | 0,004066 |
| 9 | -0,998984 | 0,001355 |
| 10 | -1,000339 | 0,000452 |
| 11 | -0,999887 | 0,000151 |
| 12 | -1,000038 | 0,000051 |
| 13 | -0,999987 | 0,000017 |
| 14 | -1,000004 | 0,000005 |
| 15 | -0,999999 | 0,000001 |
| 16 | -1,000000 | 0,000000 |
| 17 | -1,000000 | 0,000000 |

Hampiran akar .

(Proses iterasinya konvergen berosilasi yang membentuk spiral mendekati hampiran akar ).

Prosedur iterasinya adalah .

Ambil terkaan awal .

Tabel iterasinya:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 4,000000 | 2,500000 |
| 1 | 6,500000 | 13,125000 |
| 2 | 19,625000 | 171,445313 |
| 3 | 191,070313 | 18061,361847 |
| 4 | 18252,432159 | 166557385,9400 |
| ... | ... | ... |

Iterasinya divergen, artinya pemilihan untuk prosedur iterasi menghasilkan proses iterasi yang menjauhi hampiran akar.

Jadi, diperoleh akar persamaan dari dengan tebakan awal akar dan adalah atau .

Contoh 2

Tentukan akar hampiran dari persamaan , dengan

Gunakan

Penyelesaian :

Terdapat beberapa kemungkinan prosedur iterasi yang dapat dibentuk.

Diperoleh

Prosedur iterasinya adalah

Ambil terkaan awal

Tabel iterasinya adalah

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| r | Xr | |(Xr+1)-Xr| |
| 0 | 2 | 2,5 |
| 1 | 4,5 | 41,5625 |
| 2 | 46,0625 | 48821,08 |
| 3 | 48867,14 | 5,83E+13 |
| ... | ... | ... |

Iterasinya divergen, artinya pemilihan untuk prosedur iterasi menghasilkan proses iterasi yang menjauhi hampiran akar.

Diperoleh

Prosedur iterasinya adalah .

Ambil terkaan awal

Tabel iterasinya adalah

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| r | Xr | |(Xr+1)-Xr| |
| 0 | 2 | 2,5 |
| 1 | -0,5 | 1,071428571 |
| 2 | 0,571429 | 0,026132404 |
| 3 | 0,597561 | 0,011111062 |
| 4 | 0,608672 | 0,005006231 |
| 5 | 0,613678 | 0,002313247 |
| 6 | 0,615992 | 0,001081239 |
| 7 | 0,617073 | 0,000508086 |
| 8 | 0,617581 | 0,000239353 |
| 9 | 0,61782 | 0,000112889 |
| 10 | 0,617933 | 5,32724E-05 |
| 11 | 0,617986 | 2,51459E-05 |
| 12 | 0,618012 | 1,1871E-05 |
| 13 | 0,618023 | 5,60443E-06 |

Iterasi berhenti pada iterasi ke-13, karena |(Xr+1)-Xr|<ε yaitu 5,60443E-06 < 0,00001. Jadi hampiran akar dari hasil iterasi tersebut adalah x=0,618023.

Diperoleh

Prosedur iterasinya adalah

Ambil terkaan awal

Tabel iterasinya adalah

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 2 | 0,55775 |
| 1 | 1,44225 | 0,207065 |
| 2 | 1,235185 | 0,098058 |
| 3 | 1,137127 | 0,052987 |
| 4 | 1,08414 | 0,030928 |
| 5 | 1,053211 | 0,018926 |
| 6 | 1,034285 | 0,011932 |
| 7 | 1,022354 | 0,007668 |
| 8 | 1,014686 | 0,00499 |
| 9 | 1,009696 | 0,003273 |
| 10 | 1,006423 | 0,002159 |
| 11 | 1,004264 | 0,001429 |
| 12 | 1,002834 | 0,000948 |
| 13 | 1,001886 | 0,00063 |
| 14 | 1,001256 | 0,000419 |
| 15 | 1,000836 | 0,000279 |
| 16 | 1,000557 | 0,000186 |
| 17 | 1,000371 | 0,000124 |
| 18 | 1,000248 | 8,25E-05 |
| 19 | 1,000165 | 5,5E-05 |
| 20 | 1,00011 | 3,67E-05 |
| 21 | 1,000073 | 2,44E-05 |
| 22 | 1,000049 | 1,63E-05 |
| 23 | 1,000033 | 1,09E-05 |
| 24 | 1,000022 | 7,24E-06 |

Iterasi berhenti pada iterasi ke-24, karena |(Xr+1)-Xr| < ε yaitu 7,24E-06 < 0,00001. Jadi hampiran akar dari hasil iterasi tersebut adalah x=1,000022.

Berdasarkan 3 kemungkinan iterasi yang terbentuk, maka diperoleh akar hampiran dari persamaan dengan dan terkaan nilai awal x0= 2 adalah x=0,618023 dan x=1,000022.

**Eksistensi dan ketunggalan titik tetap**

* Teorema 1

Jika 𝜙 kontinu pada [𝑎,𝑏] dan 𝜙(𝑥)∈[𝑎,𝑏] maka 𝜙 mempunyai titik tetap di dalam [𝑎,𝑏].

* Teorema 2

Jika 𝜙 memenuhi kondisi seperti pada teorema 1 dan terdiferensial pada interval terbuka (𝑎,𝑏) dengan 𝜙′𝑥<1 untuk setiap 𝑥∈(𝑎,𝑏) maka titik tetapnya tunggal.

**Kriteria Konvergensi**

Diberikan prosedur iterasi. Misalkan *x* = *s* adalah solusi sehingga dan Selisih antara dan adalah

……………………………………………(\*)

Terapkan teorema nilai rata-rata pada persamaan (\*) sehingga diperoleh:

yang dalam hal ini . Misalkan galat pada iterasi ke dan iterasike adalah

dan

maka persamaan dapat ditulis menjadi

atau dalam tanda mutlak

.

Misalkan dan berada dalam selang sejauh dari yaitu Jika iterasi konvergen di dalam selang tersebut, yaitu menuju , maka galat setiap iterasi berkurang. Jadi, haruslah dipenuhi kondisi:

.

Kondisi tersebut hanya berlaku jika . Karena maka untuk disini .

**Teorema**

Misalkan dan di dalam selang yang mengandung titik tetap dan nilai awal dipilih dalam selang tersebut. Jika untuk semua maka iterasi akan konvergen ke . Pada kasus ini disebut juga *titik atraktif*. Jika untuk semua maka iterasi akan divergen dari *s*.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa di dalam selang dengantitik tetap, maka:

1. Jika untuk setiap , maka iterasi*konvergen monoton*,
2. jika untuk setiap , maka iterasi*konvergen berosilasi*,
3. jika untuk setiap , maka iterasi*divergen monoton*, dan
4. jika untuk setiap , maka iterasi*divergen berosilasi*.

Hal tersebut ditunjukkan oleh gambar sebagai berikut:

Proses iterasi konvergen untuk beberapa nilai awal dan proses iterasinya membentuk zigzag yang mendekat ke akar untuk.

Konvergen monoton

Proses iterasi konvergen untuk beberapa nilai awal dan proses iterasinya membentuk spiral yang mendekat ke akar untuk.

Konvergen berosilasi

Proses iterasi divergen untuk beberapa nilai awal dan proses iterasinya membentuk zigzag yang menjauh dari akar untuk.

Divergensi monoton

Proses iterasi divergen untuk beberapa nilai awal dan proses iterasinya membentuk spiral yang menjauh dari akar untuk.

Divergensi berosilasi

Analisis pencarian akar persamaan dengan bermacam-macam prosedur iterasi dan tebakan awal terkadang konvergen dan divergen.

Prosedur iterasi pertama: 



Terlihat bahwa untuk di sekitar titik tetap . Karena itu, pengambilan tebakan awal akan menghasilkan iterasi yang konvergen sebab 

Prosedur iterasi kedua: 



Terlihat bahwa untuk di sekitar titik tetap . Karena itu, pengambilan tebakan awal akan menghasilkan iterasi yang konvergen sebab

Prosedur iterasi ketiga 



Terlihat bahwa untuk di sekitar titik tetap Karena itu, pengambilan tebakan awal akan menghasilkan iterasi yang divergen sebab .

*Contoh 3*

Pada persamaan , tentukan selang sehingga prosedur iterasi

Penyelesaian:



Syarat konvergen adalah

Jadi, 

Urai satu per satu:

*x*2> -2 (tidak ada *x* yang memenuhi)

*x*2< 2, dipenuhi oleh



Jadi, prosedur iterasi konvergen di dalam selang . Dapat dipilih dalam selang tersebut yang menjamin iterasi akan konvergen.

*Contoh 4*

Hitunglah akar dengan metode iterasi titik tetap. Gunakan Tebakan awal akar

Penyelesaian:

Salah satu prosedur iterasi yang dapat dibuat,

Tabel iterasinya :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0,500000 | 0,074234 |
| 1 | 0,574234 | 0,021714 |
| 2 | 0,595948 | 0,006506 |
| 3 | 0,602453 | 0,001963 |
| 4 | 0,604416 | 0,000593 |
| 5 | 0,605010 | 0,000180 |
| 6 | 0,605189 | 0,000054 |
| 7 | 0,605244 | 0,000016 |
| 8 | 0,605260 | 0,000005 |
| 9 | 0,605265 | 0,000001 |
| 10 | 0,605266 | 0,000001 |
| 11 | 0,605267 | 0,000000 |

Hampiran akar .

Jadi, diperoleh akar persamaan dari dengan tebakan awal akar dan adalah .

*Contoh 5*

Carilah akar persamaan melalui beberapa prosedur berikut:

Penyelesaian:

1. Dalam hal ini . Prosedur iterasinya adalah

. Ambil terkaan awal dan .

Tabel iterasinya:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 3,000000 | 0,072317 |
| 1 | 3,072317 | 0,007642 |
| 2 | 3,079959 | 0,000806 |
| 3 | 3,080765 | 0,000084 |
| 4 | 3,080849 | 0,000009 |
| 5 | 3,080858 | 0,000001 |
| 6 | 3,080859 | 0,000000 |

Hampiran akar .

1. Dalam hal ini . Prosedur iterasinya adalah . Ambil terkaan awal dan .

Tabel iterasinya:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 3,000000 | 0,666667 |
| 1 | 2,333333 | 1,068347 |
| 2 | 3,401680 | 0,421840 |
| 3 | 2,979840 | 0,136531 |
| 4 | 3,116371 | 0,047541 |
| 5 | 3,068831 | 0,016156 |
| 6 | 3,084986 | 0,005537 |
| 7 | 3,079450 | 0,001892 |
| 8 | 3,081342 | 0,000647 |
| 9 | 3,080695 | 0,000221 |
| 10 | 3,080916 | 0,000076 |
| 11 | 3,080840 | 0,000026 |
| 12 | 3,080866 | 0,000009 |
| 13 | 3,080857 | 0,000003 |
| 14 | 3,080860 | 0,000001 |
| 15 | 3,080859 | 0,000000 |

Hampiran akar .

1. Dalam hal ini . Prosedur iterasinya adalah

. Ambil terkaan awal dan .

Tabel iterasinya:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 3,000000 | 0,109126 |
| 1 | 3,109126 | 0,037860 |
| 2 | 3,071266 | 0,012883 |
| 3 | 3,084149 | 0,004413 |
| 4 | 3,079736 | 0,001508 |
| 5 | 3,081244 | 0,000516 |
| 6 | 3,080728 | 0,000176 |
| 7 | 3,080904 | 0,000060 |
| 8 | 3,080844 | 0,000021 |
| 9 | 3,080865 | 0,000007 |
| 10 | 3,080858 | 0,000002 |
| 11 | 3,080860 | 0,000001 |
| 12 | 3,080859 | 0,000000 |

Hampiran akar .

Dari ketiga prosedur yang diberikan ternyata menghasilkan hampiran akar yang sama yaitu . Hal ini menunjukkan bahwa akar dari persamaan adalah kembar dengan .

1. **Algoritma**

Proses iterasi titik tetap:

1. Ubahlah ke dalam bentuk .
2. Tentukan sebuah nilai awal dan jumlah iterasi maksimum.
3. Hitung .
4. Untuk nilai awal, kita dapat hitung berturut-turut   
   , di mana barisan , , …… konvergen pada suatu titik s. Limit dari titik adalah suatu titik tetap dari , yakni .
5. Kondisi iterasi berhenti apabila dengan telah ditetapkan sebelumnya.
6. **Diagram Alur**

**Definisikan fungsi**

**Input, tol, iter**

**Iter = 0**

**Iter = iter + 1**

**=**

**tol**

**Iter > iter**

**Tulis hasil**

Tulis hasil

**Selesai**

Ya

Tidak

1. **Program Metode Iterasi Titik Tetap pada Turbo Pascal**

Program iterasititiktetap dengan prosedur iterasi ;

uses wincrt;

var

x0, xb, tol, epsilon:real;

iter:integer;

function g(x:real):real;

begin

g:=sqrt(2\*x+3);

end;

begin

writeln('Program Mencari Nilai Akar dengan Metode Iterasi Titik Tetap'); writeln('~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~');

writeln;

writeln('Mencari Akar dari Persamaan g(x)=sqrt(2\*x+3)');

writeln;

write('Harga Awal='); read(x0);

write('Toleransi=');read(tol);

iter:=0;

writeln('iterasi x(r) x(r+1) |x(r+1)-xr|');

epsilon:=tol+1;

while (iter<=iter) and (epsilon>tol) do

begin

iter:=iter+1;

xb:=g(x0);

epsilon:=abs(xb-x0);

writeln(iter:3,' ',x0:15:5, ' ', xb:8:5, ' ', epsilon:11:4);

x0:=xb;

end;

if(epsilon<tol) then

begin

writeln('Toleransi terpenuhi');

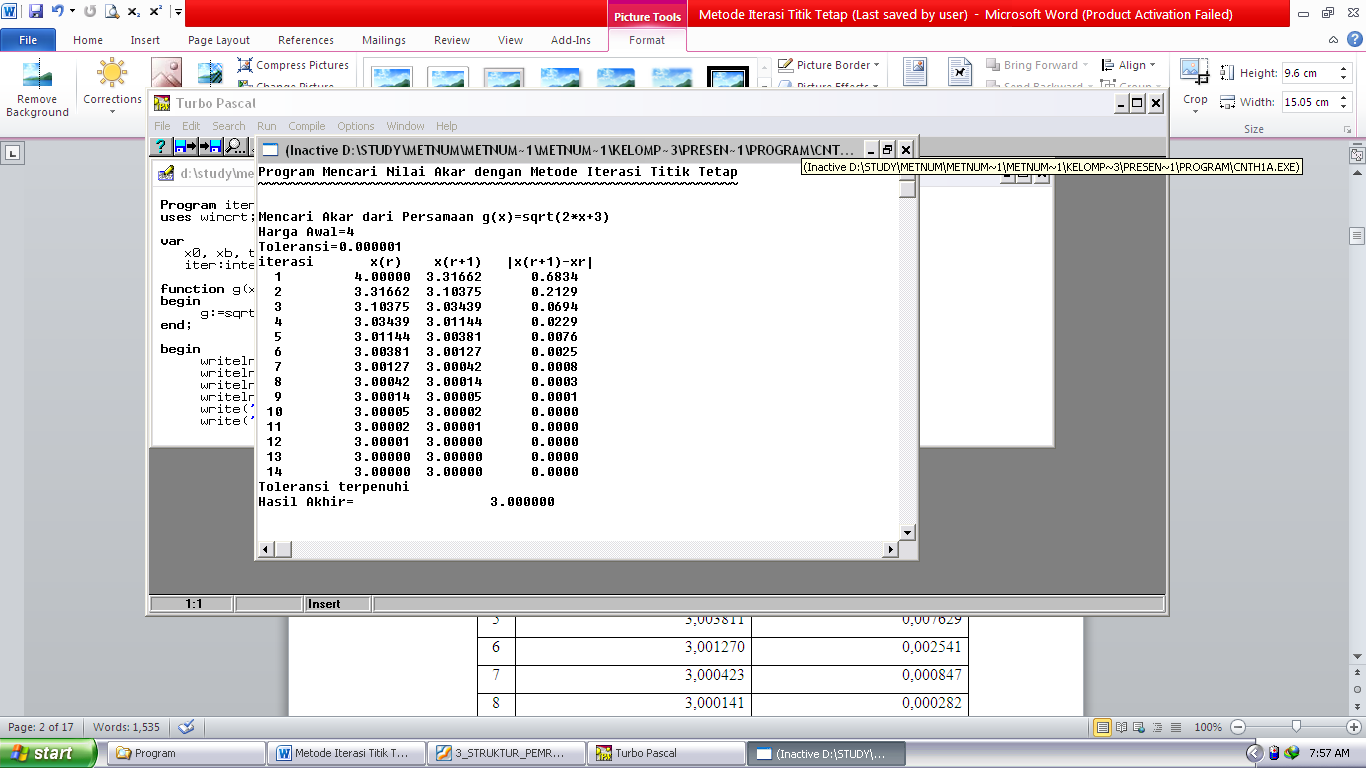
writeln('Hasil Akhir=',xb:25:6);

end

else writeln('Toleransi tidak terpenuhi');

end.

Hasil Program



**DAFTAR PUSTAKA**

Dyer, Charles. 2002. *Fixed Point Iteration.* University of Leeds.

Munir, Rrinald. 2010. *Metode Numerik.* Bandung:Informatika.

Nasution, A & Z, Hisbullah. 2001. *Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil.* Bandung:Institut Teknologi Bandung.

Rochmad. 2012. *Bahan Ajar Mata Kuliah Metode Numerik.* Semarang:Universitas Negeri Semarang.

<http://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=22&cad=rja&uact=8&ved=0CCIQFjABOBQ&url=http%3A%2F%2Fxa.yimg.com%2Fkq%2Fgroups%2F22913345%2F175318240%2Fname%2FNUMERIK.ppt&ei=rp8yVOaVM5SyuQSbkYD4CQ&usg=AFQjCNGnpKPNausQaFNUraL9OPB2JOScvQ&bvm=bv.76802529,d.c2E> diunduh pada tanggal 6 Oktober 2014.

<http://ediskm.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/36133/Kesalahan+dan+Akar+Persamaan-ES.ppt> diunduh pada tanggal 6 Oktober 2014.